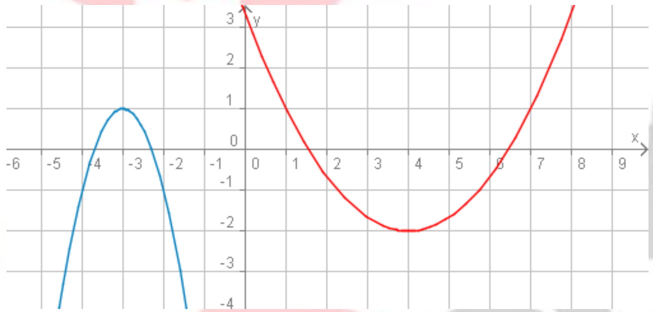
Grundwissen Mathematik 9 . Klasse

Wissen	Aufgaben/Beispiele	Lösungen
Quadratwurzeln: $\sqrt{a}$, $a \geq 0$ ist diejenige nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ergibt. D.h.: $\sqrt{a}$ ist die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a$. **Irrationale Zahlen:** Es gibt Zahlen a > 0, für die $\sqrt{a}$ keine rationale Zahl ist. Irrationale Zahlen lassen sich als unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche schreiben. **Reelle Zahlen $\mathbb{R}$:** Rationale und irrationale Zahlen ergeben zusammen die Menge der **Reellen Zahlen $\mathbb{R}$.**	1. Berechne (ohne TR): a) $\sqrt{1{,}44}$ b) $\sqrt{\frac{49}{64}}$ c) $\sqrt{(-0{,}6)^2}$ d) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ 2. Ergänze den Satzbeginn durch „Jede“, „Manche“ oder „Keine“. Gib jeweils ein Beispiel an: a) … irrationale Zahl ist eine reelle Zahl. b) … reelle Zahl(en) ist eine (sind) irrationale Zahl(en).	1. a) 1,2 b) $\frac{7}{8}$ c) 0,6 d) $\frac{5}{4}$ 2. a) „Jede“ (z.B. $\sqrt{3}$) b) „Manche“ (z.B. $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ und $\sqrt{3}$ ist irrational, aber $-4 \in \mathbb{R}$ aber -4 ist nicht irrational)
Rechnen mit Quadratwurzeln: **→ Für alle $a \epsilon \mathbb{R}$ gilt: $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$** → $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ **„Multiplikationsregel“** → $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$ **„Divisionsregel“** **Aber:** $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$	3. Ziehe teilweise die Wurzel: a) $\sqrt{147}$ b) $\sqrt{25d^3}$ 4. Vereinfache (ohne TR): a) $6\sqrt{5} - \sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{9a^5} - \sqrt{a^3}$	3. a) $= \sqrt{49 \cdot 3} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ b) $= \sqrt{25d^2 \cdot d} = 5 \cdot d\sqrt{d}$ 4. a) $= \sqrt{5} \cdot (6 - 1 + 2) = 7\sqrt{5}$ b) $= \sqrt{9a^4 \cdot a} - \sqrt{a^2 \cdot a} =$ $= 3a^2\sqrt{a} - a\sqrt{a}$
Binomische Formeln: → $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **1. binomische Formel** → $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ **2. binomische Formel** → $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ **3. binomische Formel**	5. Schreibe als Produkt mit den binom. Formeln: a) $100x^2 - 140x + 49$ b) $3a^2 + 30a + 75$ 6. Ergänze zu einer binomischen Formel: a) $0{,}16b^2 - \Delta + \nabla\nabla = (0{,}4b - 6c)^2$ b) $\frac{1}{16}r^4 + \Delta + 2 = (\Delta \diamond \nabla)^2$ 7. Mache den Nenner rational: a) $\frac{y-6}{\sqrt{y}+\sqrt{6}}$, $(y \geq 0)$ b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$	5. a) $(10x)^2 - 2 \cdot 10x \cdot 7 + 7^2$ $= (10x - 7)^2$ b) $3(a^2 + 10a + 25) = 3(a + 5)^2$ 6. a) $= 0{,}16b^2 - 4{,}8bc + 36c^2$ $= (0{,}4b - 6c)^2$ b) $= \frac{1}{16}r^4 + \frac{1}{2}\sqrt{2}r^2 + 2$ $= \left(\frac{1}{4}r^2 + \sqrt{2}\right)^2$ 7. a) … $= \frac{(y-6)(\sqrt{y}-\sqrt{6})}{(y-6)} = \sqrt{y} - \sqrt{6}$ b) … $= \frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = 9 - \sqrt{6}$

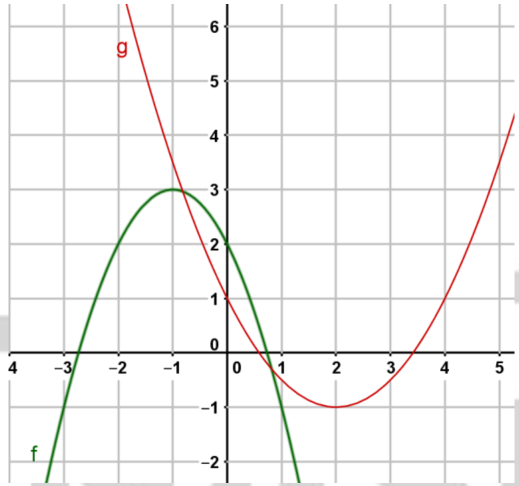
Quadratische Funktionen und Gleichungen
Eine Funktion der Form $\boldsymbol{f: x \to ax^2 + bx + c}$; $(\boldsymbol{a \neq 0})$ heißt quadratische Funktion.
Der Graph einer quadratischen Funktion heißt **<u>Parabel</u>**.
Der höchste bzw. tiefste Punkt des Graphen heißt **<u>Scheitel.</u>**



Allgemeine Form: $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$
Scheitelpunktform: $\boldsymbol{f(x) = a(x - d)^2 + e}$
→ Scheitel $S(d|e)$
Nullstellenform: $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)}$
→ Nullstellen bei $(x_1|0)$ und $(x_2|0)$.

<u>Bedeutung des Formfaktors a</u>:
- $a > 0$ → Parabel nach oben geöffnet
- $a < 0$ → Parabel nach oben geöffnet
- $|a| > 1$ → Parabel ist enger als die Normalparabel
- $|a| < 1$ → Parabel ist enger als die Normalparabel

8. Gib zu den abgebildeten Parabeln jeweils die Scheitelpunktform an:



9.
a) Bringe den Funktionsterm der Funktion f mit $f(x) = -3x^2 - 24x - 50$ auf die Scheitelpunktform.
b) Beschreibe den Graphen g_f der Funktion f möglichst genau.

8. $f(x) = -(x+1)^2 + 3$
$g(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$

9.
a) $f(x) = -3(x^2 + 8x)^2 - 50$
$= -3(x^2 + 2 \cdot 4x + 16 - 16) - 50 = -3(x+4)^2 + 3 \cdot 16 - 50$
$= -3(x+4)^2 - 2$
b) G_f ist eine nach unten geöffnete Parabel, die enger als die Normalparabel ist.
Ihr Scheitel liegt bei S(-4|-2).

Quadratische Gleichungen:
Eine quadratische Gleichung der Form **ax² + bx + c = 0** , $\boldsymbol{a \neq 0}$ hat die Lösungen

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$ **(Lösungsformel für quadratische Gleichungen)**

Der Term $D = b^2 - 4ac$ heißt **<u>Diskriminante</u>**.
Es gilt:
- $D = 0$ → Genau eine Lösung
- $D > 0$ → Zwei Lösungen
- $D < 0$ → Keine Lösung

10. Bestimme die Anzahl der Lösungen und, soweit vorhanden, die Lösungsmengen:

a) $2x^2 + 8x - 42 = 0$;
b) $-x^2 + 6x - 9 = 0$;
c) $3x^2 - 9x + 24 = 0$;

10.
a) 2 Lösungen
$x_1 = -7$; $x_2 = 3$
b) Eine Lösung
$x = 3$
c) Keine Lösung

Gleichungssysteme mit drei Variablen:

- Ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen kann man mit z.B. dem Einsetzungsverfahren lösen:
  - Löse eine Gleichung nach einer Variablen auf und setze diesen Term in <u>beide</u> anderen Gleichungen ein
  - Löse das entstehende Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten.

Funktionsterme von Parabeln bestimmen:

- Wähle ein für die Situation möglichst passendes Koordinatensystem
- Stelle darin die Gleichung der Parabel auf
- Je nach Fragestellung ist z.B. der Scheitel oder Nullstellen gesucht

Schnittprobleme:

- Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen werden bestimmt, indem man die Funktionsterme gleichsetzt

11. Löse das Gleichungssystem rechnerisch:
    (I) $3x + 2y + z = 3$
    (II) $x - y + 2z = 6$
    (III) $2x + 2y - z = -2$
12. Bei einem Schülerwettbewerb im Kugelstoßen wird die Kugel im Punkt A aus einer Höhe von 2m schräg nach oben gestoßen. Ihre Flugbahn ist parabelförmig. Ihren höchsten Punkt H hat die Parabel in einer Höhe von 4,5m.
    H liegt in waagrechter Entfernung 5m von A entfernt. Welche Weite erreicht der Stoß?
13. Bestimme die Anzahl der Schnittpunkte von $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ und $g(x) = -2x + t$ in Abhängigkeit vom Parameter t.

11. Lösung:
    $x = 1; y = -1; z = 2$
12. Parabelpunkte A(0|2), H(5|4,5)
    H ist der Scheitel
    Beachte:
    Auch B(10/2) liegt auf G_f.
    $f(x) = -0{,}1x^2 + x + 2$
    Nullstelle von f: x = 11,708(m)
13. $2x^2 - 4x + 1 = -2x + t$
    $2x^2 - 2x + 1 - t = 0$
    Diskriminante: $D = 8t - 4$
    $t > \frac{1}{2} \Rightarrow$ Zwei Schnittp.
    $t = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Ein Berührp.
    $t < \frac{1}{2} \Rightarrow$ Kein Schnittp.

Wahrscheinlichkeit verknüpfter Ereignisse

Die Ergebnismenge Ω beinhaltet alle Ergebnisse eines Zufallsexperiments. Zerlegt man die Ergebnismenge in zwei Ereignisse A und B, erhält man vier **Schnittmengen**:

$A \cap B$ „A und B treten ein“
$\bar{A} \cap B$ „A tritt nicht ein und B tritt ein“
$A \cap \bar{B}$ „A tritt ein und B tritt nicht ein“
$\bar{A} \cap \bar{B}$ „A und B treten nicht ein“
lies: $A \cap B$ *„A geschnitten B“*

	A	$\bar{A}$	
B	$A \cap B$	$\bar{A} \cap B$	B
$\bar{B}$	$A \cap \bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	$\bar{B}$
	A	$\bar{A}$	B

Diese Schnittmengen können in einer **Vierfeldertafel** dargestellt werden (siehe rechts)

Die **Vereinigungsmenge** $A \cup B$ ist die Menge der Ergebnisse, die

- nur zu A gehören (d.h. $A \cap \bar{B}$) <u>und</u>
- nur zu B gehören (d.h. $\bar{A} \cap B$) <u>und</u>
- zu A und B gehören (d.h. $A \cap B$)

→ $\boldsymbol{A \cup B = A \cap \bar{B} + \bar{A} \cap B + A \cap B}$
$\boldsymbol{= A + B - A \cap B}$

lies: $A \cup B$ *„A vereinigt B“*

14. Laut einer Umfrage eines Fitness-Studios achtet jeder fünfte Befragte sehr auf seine Ernährung (E). Von diesen Befragten gaben 60 % noch zusätzlich an, auch täglich Sport (S) zu machen. Von den insgesamt 500 Befragten gaben immerhin 125 Personen an, täglich Sport zu machen.
    a) Vervollständige die Vierfeldertafel mit den absoluten Häufigkeiten.
    b) Beschreibe $\bar{S} \cap E$ in Worten und bestimme $H(\bar{S} \cap E)$, $h(\bar{S} \cap E)$ sowie $h(\bar{S} \cup E)$

14. a)

	E	$\bar{E}$	
S	**60**	**65**	**125**
$\bar{S}$	**40**	**335**	**375**
	100	**400**	500

b) $\bar{S} \cap E$: Eine zufällig ausgewählte Person achtet auf die Ernährung und macht nicht täglich Sport.
$H(\bar{S} \cap E) = 40$
$h(\bar{S} \cap E) = \frac{40}{500} = 8\%$
$h(\bar{S} \cup E)$
$= h(\bar{S}) + h(E) - h(\bar{S} \cap E)$
$= \frac{375}{500} + \frac{100}{500} - 8\%$
$= 75\% + 20\% - 8\%$
$= 87\%$

Ähnlichkeit und Strahlensatz

Dreiecke sind ähnlich, wenn sie

- im Verhältnis ihrer Seiten übereinstimmen (S:S:S - Satz)
- in zwei Winkeln übereinstimmen (WW - Satz)

Wird eine Figur im Maßstab k vergrößert bzw. verkleinert, so nennt man die Bildfigur F_2 und die Originalfigur F_1 **zueinander ähnlich** $(F_1 \sim F_2)$.

Es gilt:

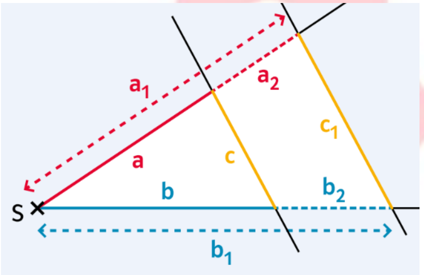
Jede Strecke in F_1 ist k-mal so lang wie die Strecke in F_2.

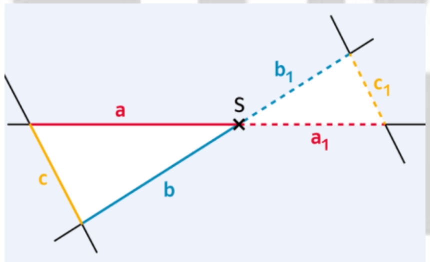
Jede Fläche in F_1 ist k^2-mal so groß wie die Fläche in F_2.

Jede Volumen in F_1 ist k^3-mal so groß wie das Volumen in F_2.

<u>Grundvoraussetzung für die Anwendung der Strahlensätze:</u>

Eine Geradenkreuzung wird von einem zwei <u>parallelen</u> Geraden geschnitten.



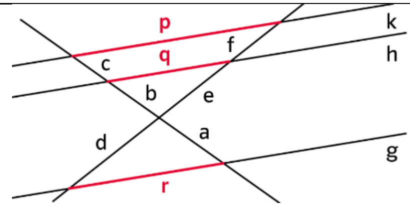


Es gilt:

- Die Länge zweier Strecken auf der einen Geraden verhalten sich wie die Längen der entsprechenden Strecken auf der anderen Geraden → $z.B.\ \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$
- Die Längen der ausgeschnittenen Parallelenstrecken verhalten sich zueinander wie die Entfernungen ihrer entsprechenden Endpunkte vom Kreuzungspunkt. → $z.B.\ \frac{a_1}{a} = \frac{c_1}{c}$

Merkhilfe: $\frac{Lang}{Kurz} = \frac{Lang}{Kurz}$

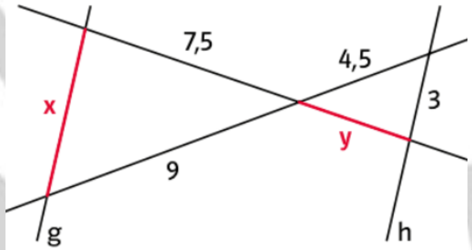
15. Es gilt: $k \,||\, h \,||\, g$. Ergänze die folgenden Gleichungen.



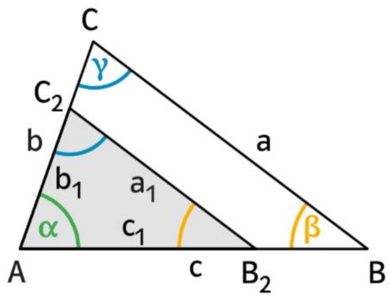
$\frac{b}{c} = -$ $\quad \frac{d}{e} = -$

$\frac{p}{q} = -$ $\quad \frac{e+f}{e} = -$

16. In der Zeichnung ist g parallel zu h. Berechne die Längen von x und y.



17. Begründe, dass die beiden Dreiecke ABC und AB_2C_2 ähnlich sind und beschreibe deren Eigenschaften.



15.

$\frac{b}{c} = \frac{e}{f}$; $\quad \frac{d}{e} = \frac{a}{b}$;

$\frac{p}{q} = \frac{c+b}{b} = \frac{f+e}{e}$;

$\frac{e+f}{e} = \frac{b+c}{b}$;

16.

$\frac{x}{3} = \frac{9}{4,5}$; $\quad \frac{y}{7,5} = \frac{4,5}{9}$

Lösung:

$x = 6$ und $y = 3,75$

17.

Dreiecke sind ähnlich wegen dem WW-Satz

Eigenschaften:

- Winkel sind gleich groß
- Streckenverhältnisse sind gleich
- Seitenlängen der Bildfigur sind k-mal so lang
- Flächeninhalt der Bildfigur ist k^2-mal so groß

Potenzfunktionen und n-te Wurzel

Potenzfunktionen: $\boldsymbol{f(x) = ax^n}$

n-te Wurzeln: Für $a \geq 0$ versteht man unter $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$ die nichtnegative Lösung der Gleichung $\boldsymbol{x^n = a}$; $(\boldsymbol{n} \in \mathbb{N})$

Schreibweise: $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a^{\frac{1}{n}}}$

Potenzen mit rationalen Exponenten: Für $\boldsymbol{a \geq 0}$ gilt:

$$\boldsymbol{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p}\ ;\ (\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{N})$$

Rechengesetze: Gleiche Basis

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

$a^r : a^s = a^{r-s}$

Gleiche Exponenten

$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

$a^r : b^r = (a : b)^r$

Potenz einer Potenz: $\boldsymbol{(a^r)^s = a^{r \cdot s}}$ $\quad (\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{Q}^+, \boldsymbol{r, s} \in \mathbb{Q})$

18. Beschreibe den Verlauf der beiden Funktionen.
    a) $g(x) = -3x^6$
    b) $h(x) = 2x^5$
19. Vereinfache und gib das Ergebnis als Wurzel an:
    a) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{3}$
    b) $\sqrt[4]{2^9} : \sqrt{2^7}$
    c) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{5}}$
20. Vereinfache:
    $2 \cdot \sqrt[3]{16} + 5 \cdot \sqrt[3]{250}$

18.
a) „Von unten nach unten“
b) „Von oben nach unten“

19. a) $3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} = 3^{\frac{9}{20}} = \sqrt[20]{3^9}$

b) $2^{\frac{9}{4}} : 2^{\frac{7}{2}} = 2^{\frac{9}{4}-\frac{7}{2}} = 2^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^5}}$

c) $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{18}} = \sqrt[18]{5}$

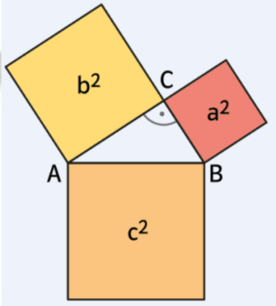
20. … $2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 8} + 5 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 125}$
$= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} + 5 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{2}$
$= \sqrt[3]{2} \cdot (4 + 25) = \sqrt[3]{2} \cdot 29$

Satz des Pythagoras

<u>In einem rechtwinkligen Dreieck</u> sind die beiden Quadrate der Katheten zusammen genauso groß wie das Quadrat der Hypotenuse.

Es gilt: **$a^2 + b^2 = c^2$**

(falls der rechte Winkel bei C ist!)

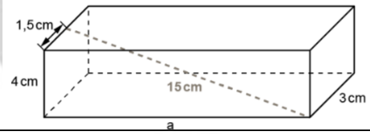


Berechnung an Figuren und Körpern:

- Höhe h im gleichseitigen Dreieck: $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$
- Diagonale d im Quadrat: $d = a\sqrt{2}$
- Raumdiagonale d_R im Würfel: $d_R = a\sqrt{3}$

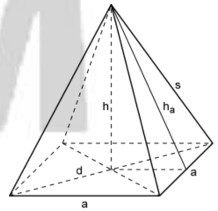
21. Berechne die fehlende Seitenlänge, den Flächeninhalt sowie den Umfang des Dreiecks.

22. Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit der Grundkante $a = 6cm$ und Seitenkante $s = 5cm$. Berechne die Seitenhöhe h_a und die Pyramidenhöhe h.
23. Berechne das Volumen des Quaders.



21. $c = \sqrt{169}cm = 13cm$
$A = \frac{1}{2} \cdot 5cm \cdot 12cm = 30cm^2$
$U = 30cm$

22. $h \approx 2{,}6cm$
$h_a = 4cm$

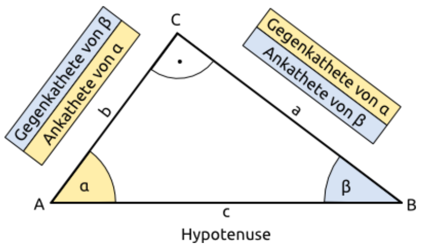


23. d $= \sqrt{15^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{222{,}75}cm$
a $= \sqrt{d^2 - 4^2} = \sqrt{206{,}75}cm$
$V \approx 172{,}5cm^3$

Trigonometrie

Im **rechtwinkligen Dreieck** ABC gilt:

- $\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{a}{c}$
- $\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{b}{c}$
- $\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{a}{b}$



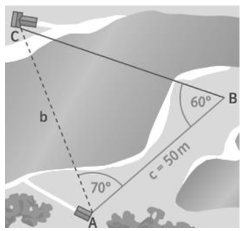
Im **beliebigen Dreieck** ABC gilt:

Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Kosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ (analog für b^2 und c^2)

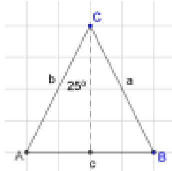
Es gilt allgemein: $sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$ und $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$

24. Berechne die Länge der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Schenkel 4 cm lang sind und deren Winkel an der Spitze 50° beträgt.
25. Ein 35m hoher Turm wirft mittags einen 18m langen Schatten auf den Boden. Unter welchem Winkel treffen die Sonnenstrahlen auf den Boden?
26. Berechne, wie weit das Haus A vom Haus C entfernt ist (Luftlinie).



27. Vereinfache: $\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha$
28. Es gilt: $\cos 60° = \frac{1}{2}$.
Ermittle sin 60°, tan 60° sowie cos 120°.

24. $\sin 25^0 = \frac{\frac{1}{2}c}{b}$
$c = 2 \cdot b \cdot \sin 25°$
$c = 3{,}4cm$



25. $\tan\alpha = \frac{35m}{18m}$
$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{35}{18}\right) \approx 62{,}8°$

26. Sinussatz: $\frac{c}{\sin 50°} = \frac{b}{\sin 60°}$
$b = \frac{c}{\sin 50°} \cdot \sin 60° \approx 56{,}5m$

27. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} : \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 1$

28. $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 60° = \sqrt{3}$;

		$cos\ 120° = -\frac{1}{2}$