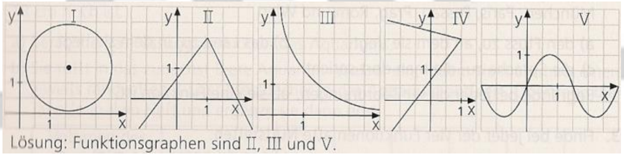
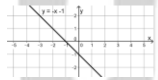
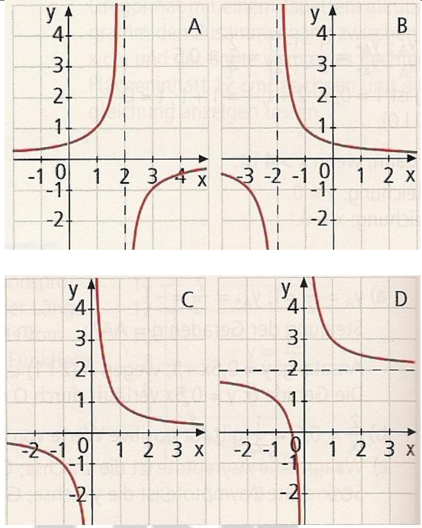
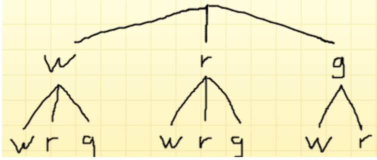
Grundwissen Mathematik 8. Klasse

Wissen	Aufgaben/Beispiele	Lösungen
Funktionen Eindeutige Zuordnungen nennt man in der Mathematik <u>Funktionen</u>. Bei einer Funktion $f: x \longmapsto y$ wird jedem Wert x genau ein Wert y zugeordnet. <u>Wichtige Fachbegriffe</u>: Variable, Zuordnungsvorschrift, Funktionsterm, Funktionsgleichung, Definitionsmenge, Wertemenge, Nullstellen.	1. Begründe welche der folgenden Graphen zu einer Funktion gehören.  2. Berechne die Nullstelle der Funktion mit dem Funktionsterm $f(x) = 5 - 0{,}25x$.	*1. Funktionen: II; III; V* *Keine Funktionen: I; IV* 2. $f(x) = 0 \iff 5 - 0{,}25x = 0$ $x = 40$;
Lineare Funktionen und Gleichungen Eine Funktion, deren Graph eine Gerade ist, heißt <u>lineare Funktion</u>. Ihre Zuordnungsvorschrift ist von der Art $f: x \longmapsto m \cdot x + t$. Geometrische Bedeutung der Parameter m und t: t: y-Achsenabschnitt des Graphen; m: Steigung der Geraden Gleichungen (oder Äquivalente) der Form $ax + by + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{Q};\ b \neq 0)$ nennt man <u>lineare Gleichungen</u>. Bei Funktionen mit der Gleichung $y = m \cdot x$ sind x und y <u>direkt proportional</u> zueinander. Der Graph einer solchen Funktion ist eine Ursprungsgerade. Bei einer direkt proportionalen Zuordnung entspricht das doppelte, dreifache … der einen Größe auch immer dem doppelten, dreifachen … der anderen Größe. <u>Wichtige Fachbegriffe:</u> Steigung, y-Achsenabschnitt, direkte Proportionalität	1. Gegeben ist eine lineare Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -x - 1$. a) Zeichne den Graphen von f in ein KSY und zeige, dass P(-93 , 92) auf dem Graphen liegt. b) Beschreibe einen Weg, wie du die Gleichung einer weiteren linearen Funktion g findest, du ebenfalls durch P geht. c) Berechne den Schnittpunkt der Geraden g(x) = x -3 mit f. d) Gegeben sind lineare Funktionen mit $h_m(x) = mx + 2$. Unter welchen Bedingungen für m schneiden sich die Graphen von f und h_m im II. Quadranten.	*1 a)*  $f(-93) = -(-93) - 1 = 92$ $\Rightarrow P \epsilon G_f$ *b) Sei Steigung m=2; Mit* $P \epsilon G_g$ *folgt:* $g(-93) = 92 \iff 2 \cdot (-93) + t = 92$ $t = 278$; $g(x) = 2x + 278$ *c) S(1/-2)* *d)* $m \in]\,2\,;\,-1\,[$

Gebrochen-rationale Funktionen, Funktionen, deren Funktionsterm ein Bruchterm ("x im Nenner") ist, nennt man <u>gebrochen rationale Funktionen</u>. Für gebrochen rationale Funktionen der Form f(x) = $\frac{a}{x+b} + c$ gilt: • Für x = -b würde der Nenner null werden. Da dies nicht erlaubt ist, ist x = -b eine <u>Definitionslücke</u> und der Graph von f hat dort eine senkrechte <u>Asymptote</u> (Gerade, der er sich beliebig nahe annähert) • für $\lvert x \rvert \to \infty$ hat der Graph von f die waagrechte Asymptote y = c • Der Graph von f entsteht aus dem Graphen der Funktion g(x) = $\frac{a}{x}$ durch Verschiebung um b nach links und um c nach oben Bei Funktionen mit der Gleichung $y = \frac{a}{x}$ sind x und y <u>indirekt proportional</u> zueinander. Bei einer indirekt proportionalen Zuordnung entspricht das doppelte, dreifache … der einen Größe immer dem halben, drittelten … der anderen Größe. <u>Wichtige Fachbegriffe</u>: Asymptote, Definitionslücke, indirekte Proportionalität.	1. Entscheide anhand des Funktionsterms, welche Asymptoten der jeweilige Graph besitzt und skizziere seinen ungefähren Verlauf. $f(x) = \frac{1}{x}$; (Graph C) $g(x) = \frac{1}{x+2}$; (Graph B) $h(x) = \frac{1}{2-x}$; (Graph A) $l(x) = \frac{1}{x} + 2$ (Graph D) 2. Beschreibe, wie der Graph von g aus dem Graphen von l entsteht.	 *2. Verschiebung um 2 nach unten und um 2 nach links.*
Bruchterme und -gleichungen, Potenzen Beim Rechnen mit Bruchtermen geht man wie beim Rechnen mit Brüchen vor (Erweitern/Kürzen, Addieren/Subtrahieren, Multiplizieren/Dividieren). Gleichungen, in denen Variablen ("Unbekannte") in <u>mindestens einem der Nenner</u> auftreten, bezeichnet man als <u>Bruchgleichungen</u>. Einfache Bruchgleichungen lassen sich durch Überkreuzmultiplizieren lösen, bei anderen musss man beide Seiten mit dem <u>Hauptnenner</u> der vorkommenden Nenner multiplizieren. Potenzgesetzte: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a^m : a^n = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $a^0 = 1$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^1$ <u>Wichtige Fachbegriffe</u>: Hauptnenner, Basis, Exponent	1. Löse die folgende Bruchgleichung (rechnerisch oder graphisch). $\frac{2}{x} = \frac{4}{3-x}$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{Q}\{0; 3\}$ 2. Löse die Formel $A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$ nach jeder Variablen auf. 3. Vereinfache so weit wie möglich $a^{-7} \cdot a^4 =$; $a^6 : a^{-4} =$; $(x^{-11})^3 =$	*1.* $\mathbb{L} = \{1\}$ *2.* $h = \frac{2A}{a+c}$; $a = \frac{2A}{h} - c$; $c = \frac{2A}{h} - a$ 3. $a^{-7} \cdot a^4 = a^{-3}$; $a^6 : a^{-4} = a^{10}$ $(x^{-11})^3 = x^{-33}$

Laplace-Wahrscheinlichkeiten Die Menge aller mögliche Ergebnisse eines Zufallsexperiments bilden die <u>Ergebnismenge Ω</u> . (|Ω| = "Mächtigkeit von Omega"="Anzahl der Elemente") Jede Teilmenge A der Ergebnismenge Ω nennt man EREIGNIS. (Besondere Ereignisse: Gegenereignis, Sicheres Ereignis, Unmögliches Ereignis) Unter der <u>Wahrscheinlichkeit P(A)</u> eines Ereignisses A versteht man den Grad der Sicherheit, mit der das Ereignis eintritt (vor Durchführung des Experiments!). Ein Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, heißt <u>Laplace-Experiment</u>. Hier gilt: $P(A) = \frac{Anzahl\ der\ für\ A\ günstigen\ Ergebnisse}{Anzahl\ aller\ möglichen\ Ergebnisse} = \frac{\|A\|}{\|\Omega\|}$ Das Zählprinzip: Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Anzahl der möglichen Ergebnisse, indem man die Anzahl der Möglichkeiten jeder Stufe miteinander multipliziert. <u>Wichtige Fachbegriffe</u>: Zufallsexperiment, Ergebnis, Ergebnismenge, Ereignis, Gegenereignis, Laplace-Experiment, Zählprinzip, Baumdiagramm	1. In einer Tüte sind 3 weiße, 2 rote und ein grünes Gummibärchen. Du holst nacheinander zwei Bärchen aus der Tüte. a) Veranschauliche das Experiment mit Hilfe eines Baumdiagramms. b) Gib die Ergebnismenge an. (Ω_1 mit beachten der Reihenfolge; Ω_2 ohne Beachtung der Reihenfolge c) Verändere das Experiment so, dass es sich um ein Laplace-Experiment handelt. 2. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der angegebenen Ereignisse: a) Aus dem Wort "ZUFALLSEXPERIMENT" wird zufällig ein Buchstabe ausgewählt. A: Es handelt sich um ein "E". B: Es handelt sich um einen Vokal. b) Eine Lostrommel enthält 600 Lose. Zwei Drittel davon sind Nieten, 80% des Restes ergeben Trostpreise, die übrigen Lose ergeben Hauptgewinne. A: Das gezogene Los ergibt einen Trostpreis. B: Das gezogene Los ergibt keinen Hauptgewinn. 3. Dein Freund besitzt ein Zahlenschloss bestehend aus 4 Ziffern von 0 bis 9. a) Wie viele unterschiedliche Kombinationen gibt es? b) Du weißt, dass die erste Zahl eine 4 und die dritte eine 7 ist. Wie viele Möglichkeiten können es dann noch sein?	 b) $\|\Omega_1\| = 8$; $\|\Omega_2\| = 5$ $\Omega_1 = \{(w\|w); (w\|r); (w\|g); (r\|w); (r\|r); (r\|g); (g\|w); (g\|r)\}$ $\Omega_2 = \{(w;w); (w;r); (w;g); (r;r); (r;g)\}$ *Erklärung:* $(w;r) = \{(w\|r); (r\|w)\}$ c) z.B. Von jeder Farbe sind gleich viele Gummibärchen in der Tüte und nach jedem ziehen, wird das Gummibärchen zurückgelegt. 2. a) $P(A) = \frac{3}{17} \approx 17{,}65\%$ $P(B) = \frac{6}{17} \approx 35{,}29\%$ b) 400 Nieten → 200 andere Lose 80% von 200 = 160 $P(A) = \frac{160}{600} = \frac{4}{15} \approx 26{,}67\%$ $P(B) = \frac{560}{600} = \frac{14}{15} \approx 93{,}33\%$ 3. a) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$ b) $1 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 10 = 100$
Lineare Gleichungssysteme Zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen bilden ein <u>lineares Gleichungssystem</u> (LGS). Ein Zahlenpaar (x/y) ist genau dann Lösung des LGS, wenn es beim Einsetzten beide Gleichungen erfüllen. <u>Wichtige Fachbegriffe</u>: Gleichungssystem, Gleichsetzungsverfahren, Einsetzverfahren, Additionsverfahren	Löse das folgende lineare Gleichungssystem: I: 2x+5y=13 II: 3x-3,5y=8,5	*. x=4 und y=1 ⟹ (4/1) ist Lsg. des LGS*

Kreis, Prisma und Zylinder

Der Umfang eines Kreises ist direkt proportional zu seinem Durchmesser. $\Longrightarrow$ Kreiszahl $\pi \approx 3{,}14 \ldots$

Umfang U eines Kreises: $U_k = 2r \cdot \pi$ bzw. U_k= d$\cdot$ π

Flächeninhalt A eines Kreises: $A_k = r^2 \cdot \pi$

Den Oberflächeninhalt eines Prismas erhält man durch Addition von Grund- und Deckfläche sowie der aus Rechtecken bestehenden Mantelfläche: $O = 2 \cdot G + M$

Für das Volumen eines geraden Prismas mit Grundfläche G und Höhe h gilt: V = $G \cdot h$

Den Oberflächeninhalt eines Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h erhält man durch Addition von Grund- und Deckfläche (Kreise) sowie der Mantelfläche (Rechteck):

$$O = 2 \cdot G + M = \ 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2r \cdot \pi \cdot h$$

Für das Volumen des Zylinders gilt:

$$V = G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

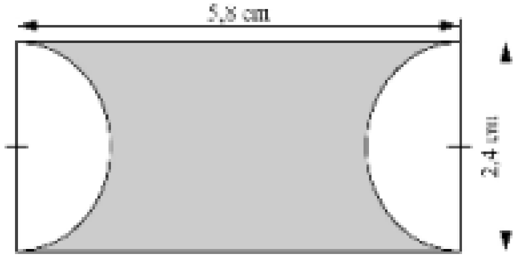
In einem Schrägbild werden in die Zeichenebene hinein gehende Kanten schräg (oft unter 45°, manchmal auch 90°) und verkürzt gezeichnet.

<u>Wichtige Fachbegriffe</u>: Kreiszahl π, Umfang und Flächeninhalt des Kreises, Zylinder, Grundfläche, Mantelfläche, Oberflächeninhalt, Volumen

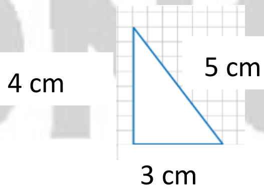
1. Ermittle die fehlenden Größen in der Tabelle.

Radius	4,5cm		
Durchmesser		40,0cm	
Umfang			92,4cm

2. Berechne den Umfang und Flächeninhalt der grauen Figur.



3. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen eins Prismas mit der abgebildeten Grundfläche und der Höhe 6 cm.



4. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen eines Zylinders mit dem Radius 4cm und der Höhe 3cm.

1.

4,5 cm	*20 cm*	$\approx 14{,}7$ *cm*
9 cm	*40 cm*	$\approx 29{,}4$ *cm*
28,26 cm	*125,6 cm*	*92,4 cm*

2. $U = 2 \cdot 5{,}8 + 2 \cdot \frac{2{,}4}{2} \cdot 3{,}14 = \cdots$
$\approx 19{,}14\ [cm]$

$A = 5{,}8 \cdot 2{,}4 - \left(\frac{2{,}4}{2}\right)^2 \cdot 3{,}14 =..$
$\approx 9{,}40\ [cm^2]$

3. $O = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4cm \cdot 3cm\right) + 6cm \cdot (4cm + 3cm + 5cm) = 84cm^2$

$$V = \frac{1}{2} \cdot 4cm \cdot 3cm \cdot 6cm = 36cm^3$$

4. $O = 2 \cdot (4cm)^2 \cdot \pi + 2 \cdot \pi \cdot 4cm \cdot 3cm$ $\approx 176cm^2$

$V = (4cm)^2 \cdot \pi \ \cdot 3cm \approx$
$\approx 151cm^3$