Grundwissen Mathematik 10. Klasse

WELFEN–GYMNASIUM SCHONGAU

Wissen	Aufgaben/Beispiele	Lösungen

Kugel

Wissen

Volumeninhalt einer Kugel: $V_K = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$

Oberflächeninhalt einer Kugel: $O_k = 4r^2 \cdot \pi$

Aufgaben/Beispiele

Wir betrachten eine Kugel und einen Zylinder mit dem gleichen Radius und Höhe der Kugel.
Berechne wie viel Prozent das Volumen/der Oberflächeninhalt der Kugel im vgl. zum Kegel beträgt.

Lösungen

$\frac{V_K}{V_{Zy}} = \frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{r^2\pi \cdot 2r} = \frac{2}{3} \approx 66{,}67\%$

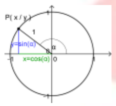
$\frac{O_K}{O_{Zy}} = \frac{4r^2\pi}{2 \cdot r^2\pi + 2r\pi \cdot 2r} \approx 66{,}67\%$

Sinus und Kosinus I

Wissen

Der Wert für den Sinus und Kosinus eines Winkels α ist eindeutig durch einen Punkt P(x/y) am Einheitskreis definiert.

- $\cos(\alpha) = x \left(= \frac{x}{1}\right)$
- $\sin(\alpha) = y \left(= \frac{y}{1}\right)$



(Für $\alpha \in [0°; 90°]$ entspr. dies der Definition über die Seitenverhältnisse eines rechtwinkligen Dreiecks.)

Die Größe eines Winkels kann in Grad ε (Gradmaß) oder durch eine Zahl x (Bogenmaß) angegeben werden. (Zshg.: $\frac{x}{2\pi} = \frac{\varepsilon}{360°}$)

ε in °	0	30	45	60	90	180	360
x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	2π

Aufgaben/Beispiele

1. Rechne jeweils in das andere Maß um. Gib das Ergebnis auf Grad genau bzw. als Vielfaches von π an.
   a) 15° ; b) $\frac{\pi}{5}$; c) 75°
   d) $\frac{11\pi}{6}$; e) 240° ; f) 0,82

2. Bestimme mit dem Taschenrechner (Runde auf 4 Nachkommastellen.)
   a) $sin(160°)$; b) $cos(224°)$
   c) $\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)$; e) $\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)$

3. Bestimme die **<u>beiden</u>** zwischen 0° und 360° liegenden Winkel, für welche gilt:
   a) $\sin(\alpha) = 0{,}2588$; b) $\cos(\alpha) = 0{,}9112$
   c) $\sin(\alpha) = -0{,}9580$; d) $\cos(\alpha) = -0{,}9909$

Lösungen

1. a) $\frac{\pi}{12}$; *b) 36°* ; *c)* $\frac{5\pi}{12}$
d) 330° ; *e))* $\frac{4\pi}{3}$; *f) 47°*

2. a) 0,3420 ; b) -0,7193
c) -0,9511 ; d) -0,3090

3. a) $\alpha_1 \approx 15{,}0°$; $\alpha_2 \approx 345{,}0°$
b) $\alpha_1 \approx 24{,}3°$; $\alpha_2 \approx 155{,}7°$
c) $\alpha_1 \approx 286{,}7°$; $\alpha_2 \approx 253{,}3°$
d) $\alpha_1 \approx 172{,}3°$; $\alpha_2 \approx 187{,}7°$

Wachstumsprozesse und Exponentialfunktion

Wissen

Lineares Wachstum: $f(t) = b + d \cdot t$	Exponentielles Wachstum: $g(t) = b \cdot a^t$
d: <u>absolute Zunahme</u> pro Zeiteinheit $\left(d = \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$	a-1: <u>relative Zunahme</u> pro Zeiteinheit $\left(a = \frac{g(t)}{g(t-1)}\right)$
b: Startwert zum Zeitpunkt $t = 0$ $\big(b = f(0)\big)$	

Eine Funktion der Form f: $x \mapsto b \cdot a^x$ (a > 0) heißt Exponentialfunktion.
(a>1 ⟹ Wachstum; a<1 ⟹ Zerfall/negatives Wachstum)

Aufgaben/Beispiele

1. Ein mit Zinseszins angelegtes Kapital verdoppelt sich in 10 Jahren. Bestimme den Zinssatz.
2. Bestimme den Term einer linearen Funktion (Exponentialfunktion) deren Graph durch die Punkte P(2/1) und Q(3/2) verläuft.
3. Zu Beginn sind 100mg Strontium 90 vorhanden, welches mit einer Halbwertszeit von 28 Jahren zerfällt. Gib die zugehörige Exponentialfunktion an und berechne wie viel Strontium 90 nach 50 Jahren vorhanden ist.

Lösungen

1. $ba^{10} = 2b \implies a = \sqrt[10]{2} \approx 1{,}0718$
$\implies$ *Zinssatz: 7,18%*

2. $d = \frac{2-1}{3-2} = 1$ $\quad a = \frac{2}{1} = 2$
$1 = 1 \cdot 2 + b$ $\quad 1 = b \cdot 2^2$
$\implies f(t) = t + 1$ $\quad \implies g(t) = \frac{1}{4} \cdot 2^t$

3. $100 \cdot a^{28} = \frac{1}{2} \cdot 100 \implies a = \sqrt[28]{0{,}5}$
$\implies g(t) = 100 \cdot \sqrt[28]{0{,}5}^{\,t}$
$f(50) \approx 29{,}0\ [mg]$

Exponentialgleichungen und Logarithmen

Die Lösung x der Gleichung $a^x = b$ heißt Logarithmus von b zur Basis a.

$$x = \log_a(b) \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b \qquad (a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0)$$

Rechengesetze:
I. $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
II. $\log_a(u : v) = \log_a(u) - \log_a(v)$
III. $\log_a(u^x) = x \cdot \log_a(u)$

Umrechnungsformel: $\log_a(u) = \frac{lg(u)}{lg(a)} \qquad (\ln(u) = log_{10}(u))$

1. Bestimme die Variable
   a) $\log_a(25) = 2$; b) $\log_a(16) = -2$
   c) $\log_3(b) = -3$

2. Vereinfache soweit wie möglich
   a) $\log_a(u^2) - \log_a(u)$; b) $2 \cdot \lg\left(\frac{1}{a}\right) + \lg(a^2)$

3. Löse folgende Gleichungen
   a) $5^{2x-3} = 5$; b) $6 \cdot 1{,}5^x = 2{,}3$

1. a) $\log_a(25) = 2 \Leftrightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$
b) $a^{-2} = 16 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$
c) $3^{-3} = b \Rightarrow b = \frac{1}{27}$

2. a) $\log_a(u^2) - \log_a(u) = \log_a\left(\frac{u^2}{u}\right) = \log_a(u)$
b) $2 \cdot \lg\left(\frac{1}{a}\right) + \lg(a^2) = \lg\left(\left(\frac{1}{a}\right)^2 \cdot a^2\right) = \lg(1) =$
0

3.

a)	*b)*
$5^{2x-3} = 5$	$6 \cdot 1{,}5^x = 2{,}3$
$(5^2)^x \cdot 5^{-3} = 5$	$1{,}5^x = \frac{23}{60}$
$25^x = 625$	$x = \log_{1,5}\left(\frac{23}{60}\right)$
$x = \log_{25}(625) = 2$	$x \approx -2{,}36$

Umgang mit Funktionen jeglicher Art

Trigonometrische Funktion:	$t(x) = a \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d$
Exponentialfunktion:	$e(x) = b \cdot a^x$
Ganzrationale Funktion:	$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$
Gebrochen rationale Funktion:	$f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0}$

Wichtige Fachbegriffe: Definitionsmenge, Wertemenge, Nullstellen, Schnittpunkt mit y-Achse, Asymptoten

Spezialfall: Ganzrationale/ Polynomfunktion
Ist ein Polynom vollständig faktorisiert (in Linearfaktoren zerlegt), kann man die Nullstellen direkt am Funktionsterm ablesen. Kommt der Linearfaktor einer Nst. k-mal vor, so spricht man von einer k-fachen Nullstelle.
(Ist $x_i = a$ Nst. von p mit grad(p) = n $\Leftrightarrow p(x) = (x - a) \cdot g(x)$ mit $grad\big(g(x)\big) = n - 1$)

Gilt für die Funktionen f und g $g(x) = a \cdot f\big(b \cdot (x - c)\big) + d$, so geht der Graph G_g durch Transformation aus dem Graphen G_f hervor.

d: Verschiebung in y-Richtung um d
c: Verschiebung in x-Richtung um c
a: Streckung/Stauchung in y-Richtung mit Faktor a (a = -1; Spiegelung an x-Achse)
b: Streckung/Stauchung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{b}$ (b= -1; Spiegelung an y-Achse)

Symmetrie des Graphen einer Funktion

Ist G_f achsensymmetrisch zur y-Achse	Ist G_f punktsymmetrisch zum Ursprung
$\Leftrightarrow \quad f(-x) = f(x)$	$\Leftrightarrow \quad f(-x) = -f(x)$

Untersuche die folgenden Funktionen und Graphen jeweils auf
a) die maximal Definitionsmenge
b) die Wertemenge
c) alle Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
d) Asymptoten
e) Symmetrie bzgl. y-Achse oder des Koordinatenursprungs

1. $t(x) = 2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$
2. $e(x) = 0{,}5 \cdot 1{,}5^{-x} - 1$
3. $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$
4. $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2}$

1. a) $\mathbb{D}_t = \mathbb{R}$; *b)* $\mathbb{W}_t = [0; 4]$
c) $t(x) = 0 \Rightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 0$
$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$
$x_1 - \frac{\pi}{4} = sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$
$x_1 = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow x_k = k \cdot \frac{3}{4}\pi$
$\Rightarrow S_{x,k}(k \cdot \frac{3}{4}\pi \,/\, 0)$
$t(0) = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow S_y(0 \,/\, 2 - \sqrt{2})$
d) keine Asymptoten
e) keine Symmetrie bzgl. Achsen, da $t(-x) \neq t(x)$ *und* $t(-x) \neq -t(x)$

2. a) $\mathbb{D}_e = \mathbb{R}$; *b)* $\mathbb{W}_e = [-1; \infty[$
c) $e(x) = 0 \Rightarrow \cdots S_x(-1{,}71 \,/\, 0)$
$e(0) = \cdots \Rightarrow S_y(0 \,/\, -0{,}5)$
d) $\lim\limits_{x \to \infty}\big(e(x)\big) = -1$; *y=-1 ist Asymptote*
e) keine Symmetrie bzgl. ..., da ...

3. a) $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$; *b)* $\mathbb{W}_g = \mathbb{R}$
c) $g(x) = \cdots = (x + 3) \cdot (x - 1)^2$
(Polynomdivision und Lsg.-formel für Quad.-gleichungen)
$g(x) = 0 \Rightarrow S_x(-3 \,/\, 0)$ *und* $S_x(1 \,/\, 0)$
($\Rightarrow x = -3$ *einfache Nst.;* $x = 1$ *zweifache Nst.*
$g(0) = \cdots \Rightarrow S_y(0 \,/\, 3)$
d) keine Asymptoten
e) keine Symmetrie bzgl. Achsen, da ...

4. a) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; *b)* $\mathbb{W}_f =]2; \infty[$
c) G_f *hat keine Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen*
d) $\lim\limits_{x \to \infty}\big(f(x)\big) = 2 = \lim\limits_{x \to -\infty}\big(f(x)\big)$
$\Rightarrow$ *y=2 ist waagrechte Asymptote*
x=0 ist Def.-Lücke $\Rightarrow$ *x=0 ist senkr. Asympt.*

e) $f(-x) = \frac{2\cdot(-x)^2+1}{(-x)^2} = \frac{2x^2+1}{x^2} = f(x)$

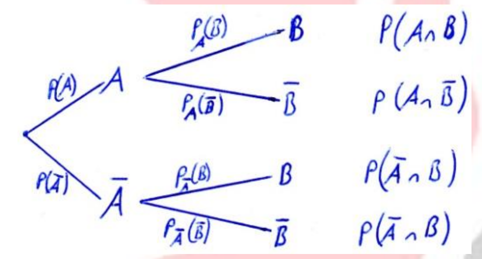
$\Longrightarrow G_f$ ist symmetrisch bzgl. der y-Achse

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P_A(B)$: Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis B eintritt, wenn man bereits weiß, dass das Ereignis A eingetreten ist)

Darstellung von mehrstufigen (zweistufigen) Zufallsexperimenten

In einem Baumdiagramm
(zwei Möglichkeiten; erst A oder erst B)



In einer Vierfeldertafel

	A	$\bar{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

Pfadregeln (9. Jgst.): $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$; $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

$$\Longrightarrow \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{|A \cap B|}{|A|}$$

1. Beim Werfen eines Oktaeders (Würfel mit 8 Seiten), hat Max auf das Ereignis A: "1 oder 8" gesetzt.
   a) Gib die Wahrscheinlichkeit von A an.
   b) Max sieht, dass keine 5 gewürfelt wurde. Bestimme mit welcher Wahrscheinlichkeit er dann gewinnt.

2. Oma hat 18 blaue und 12 andersfarbige Stifte. Bei sechs blauen und vier anderen ist die Mine eingetrocknet.
   a) Erstelle eine Vierfeldertafel
   b) Oma nimmt einen beliebigen Stift heraus. Gib an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Mine nicht eingetrocknet ist.
   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein blauer Stift in Ordnung?

1. a) $P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$

b) $P_{\bar{5}}(A) = \frac{2}{7} \approx 28{,}57\%$

2. a) *B: Stift ist blau ; E: Stift ist eingetrocknet*

	E	$\bar{E}$	
B	6	12	18
$\bar{B}$	4	8	12
	10	20	30

b) $P(E) = \frac{6+4}{30} = \frac{1}{3} \approx 33{,}33\%$

c) $P_B(\bar{E}) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \approx 66{,}67\%$

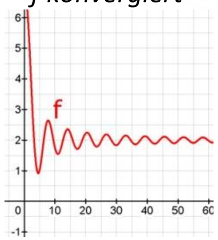
("unter der Bedingung, dass der Stift blau ist")

Der Grenzwert für $x \to \pm\infty$

Der Limes einer Funktion bestimmt denjenigen Wert, dem sich die Funktion in der Umgebung einer bestimmten Stelle annähert.

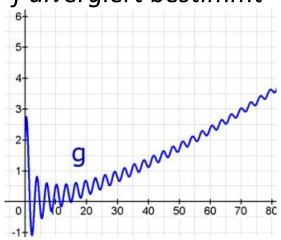
$$\lim_{x \to b} f(x) = a$$

f konvergiert



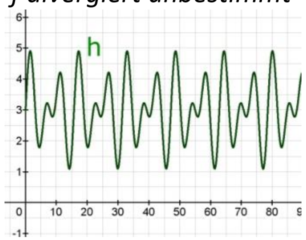
$\lim\limits_{x \to \infty} (f(x)) = 2$

f divergiert bestimmt



$\lim\limits_{x \to \infty} (f(x)) = \infty$

f divergiert unbestimmt



Limes existiert nicht.

1. Bestimme für die folgenden Funktionen $f: x \mapsto f(x)$ das Grenzverhalten für $x \to \pm\infty$.
   a) $f(x) = 2 + \frac{5}{x}$; b) $f(x) = \frac{-3x+2}{4x-5}$
   c) $f(x) = 5 \cdot 2^x$; d) $f(x) = \frac{x^2}{\sin(x)}$
   e) $f(x) = \frac{2x+1}{3x^2+4}$; f) $f(x) = x^4 - x^3$

2. Gib eine Funktion an, die folgende Eigenschaften erfüllt.
   a) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x)) = -0{,}6$
   b) f divergiert und besitzt nur negative Funktionswerte.

1. Teilweise muss zur Begründung der Funktionsterm umgeschrieben werden (z.B. $x^4 - x^3 = x^3 \cdot (x-1)$)

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(2 + \frac{5}{x}\right) = 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x)) = 2$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x)) = -\frac{3}{4} = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x))$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} (5 \cdot 2^x) = \infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x)) = 0$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x))$ *u.* $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x))$ *ex. nicht*

e) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x)) = 0^+$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x)) = 0^-$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x)) = \infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x)) = \infty$

2. a) z.B. $f(x) = \frac{1}{x} - 0{,}6$

b) z.B. $f(x) = -x^2 - 1$